

11. Übung zur Mathematik für Wirtschaftsinformatiker

Abgabe am 10.01.2012 vor der Vorlesung
in den Kasten für Übungen im Untergeschoss des MI

Aufgabe 1

(3+8 Punkte)

- a) Beweisen Sie die folgende Aussage mit Hilfe des Differenzenquotienten:
Es sei g eine differenzierbare reelle Funktion. Dann gilt:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

für alle x aus dem Definitionsbereich mit $g(x) \neq 0$.

- b) Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung für jeden der folgenden Ausdrücke:

- i) $\sin(x^2 + \exp(3x))$
- ii) $\exp(3x^3 + 4x)$
- iii) $(\sin(2x) + \cos(x^2))^2$
- iv) $\frac{x^2 + 4}{3x - 6}, x \neq 2$

Aufgabe 2

(6+9 Punkte)

- a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:
- i) Es sei f eine differenzierbare reelle Funktion mit $f'(x) \geq 0, x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Dann ist f monoton wachsend auf dem Intervall $[a, b]$.
 - ii) Es sei f eine differenzierbare und auf dem Intervall $[a, b]$ monoton wachsende reelle Funktion. Dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.
- b) Gegeben seien die drei differenzierbaren Funktionen mit den zugehörigen Definitionsbereichen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \ln(\ln(x)), & D_1 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \\ f_2(x) &= x^2 + 2x + 6, & D_2 &= \mathbb{R} \\ f_3(x) &= \frac{1}{-2x + 6}, & D_3 &= \mathbb{R} \setminus \{3\} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie für jede Funktion f_i einen maximalen Definitionsbereich $\tilde{D}_i$, so dass diese auf diesem monoton wachsend ist, und geben Sie die zu der eingeschränkten Funktion $\tilde{f}_i := f_i|_{\tilde{D}_i}$ gehörende Umkehrfunktion an.

Aufgabe 3

(6+2+4 Punkte)

Eine reelle Funktion f heißt *gerade*, falls $f(x) = f(-x)$, und *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f gilt.

a) Sind die folgenden Funktionen gerade, ungerade oder nichts von beidem?

i) $f(x) = 4x^4 - 3x^2 - \cos(x)$

ii) $f(x) = \frac{x^3 - x + 2}{1 - x}$

iii) $f(x) = x^3 + 3\sin(3x^3)$

b) Interpretieren Sie die Begriffe gerade und ungerade im Hinblick auf Symmetrie der Funktion. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

c) Es sei f eine differenzierbare reelle Funktion. Beweisen Sie, dass wenn

i) f gerade ist, f' ungerade ist und

ii) f ungerade ist, f' gerade ist.

Aufgabe 4

(3+3+3 Punkte)

Geben Sie den jeweiligen Grenzwert der Folgen

a) $a_\nu = \frac{3\nu^3 + 2\nu - 1}{6\nu^3 - 5\nu^2 - \nu + 2}$

b) $a_\nu = \frac{(3\nu^2 - \nu)^2}{(3\nu^2 + \nu)^2}$

c) $a_\nu = \frac{2\nu^2 - 1}{(-3)^\nu \nu^2 + 4\nu}$

für $\nu \rightarrow \infty$ an.

Die folgenden Aufgaben dienen zur Wiederholung des bisherigen Inhalts der Vorlesung. Ihre Bearbeitung ist freiwillig. Für richtige Lösungen können Bonuspunkte erworben werden, die auf Ihre Gesamtpunktzahl angerechnet werden.

Zusatzaufgabe 1

(2+2 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Zusatzaufgabe 2

(1+1+1+1 Punkte)

Geben Sie die folgenden Binärzahlen als normalisierte Gleitpunktzahl zur Basis $B = 2$ und mit Mantissenlänge $k = 8$ an und wandeln Sie diese in Dezimal- und Hexadezimalzahlen um.

a) $(1011.101)_2$

c) $(1111.01)_2$

b) $(100101)_2$

d) $(0.010011)_2$

Zusatzaufgabe 3

(3 Punkte)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe 4

(4 Punkte)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$, wann die Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2a \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

singulär bzw. regulär ist. Bestimmen Sie außerdem den Kern der singulären Matrix A_a .

Hinweise:

- Die Studenten, die Ihre Prüfungsnummer bei der Anmeldung zu den Übungen nicht angegeben und diese noch nicht nachgereicht haben, sollten bis spätestens zum 22. 12. eine Email mit dem **Betreff „Prüfungsnummer“** mit Namen, Matrikel- und Prüfungsnummer an Herrn Budke schicken.
- Die Anmeldeformulare zur Klausur finden Sie ab dem 20. Dezember, 14 Uhr, auf der Webseite zur Vorlesung. Dieses werfen Sie bitte ausgefüllt und unterschrieben in den Kasten zur Vorlesung im Untergeschoss des MI ein. **Die Frist für die Abgabe der Anmeldeformulare zur Teilnahme an der ersten Klausur am 13. Februar 2012 ist der 30. Januar 2012.**

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und
einen guten Rutsch ins neue Jahr!